

УДК 621.982: 669.295

Сердюк А. А., Лещенко Г. А.

## ПОВЫШЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ОБРАБОТКИ ЗУБЧАТЫХ КОЛЁС НА СТАНКАХ С ЧПУ

В настоящее время на машиностроительных предприятиях в связи с ограниченным количеством специализированного оборудования для зубообработки, его загруженностью и с целью ускорения выпуска деталей возникает необходимость обработки зубчатых колёс на станках с ЧПУ. Однако при этом возникает проблема создания управляющей программы для станка. Главной сложностью при создании этой управляющей программы является описание эвольвентного профиля зубчатого колеса с требуемой точностью.

Обычно обработка эвольвентного профиля осуществляется с применением функции линейной интерполяции, встроенной в систему ЧПУ. Однако интерполяция траектории в виде последовательности линейных отрезков требует большого количества кадров для обеспечения требуемой точности обработки, что приводит к увеличению времени обработки и снижению производительности.

Анализ литературных источников позволил установить, что использование метода Лагранжа, Ньютона и параболической интерполяции имеет существенный недостаток – степень интерполяционного многочлена зависит от числа узлов сетки, значит, при большом количестве заданных точек получится многочлен большой степени, что затруднит расчет интерпелянты и создание управляющей программы [1].

Наиболее подходящим решением поставленной задачи представляется использование сплайн-интерполяции, в частности, некоторые авторы [2, 3] рекомендуют метод интерполяции, основанный на построении гладкой сплайн-функции. Несмотря на недостаток этого метода (сложность и большой объем вычислений), он имеет ряд следующих достоинств: график построенной функции проходит через каждую точку массива, степень многочлена не зависит от числа узлов сетки и, следовательно, не изменяется при его увеличении, построенная функция имеет непрерывные производные второго порядка и обладает хорошими аппроксимирующими свойствами.

Целью работы является разработка эффективного алгоритма обработки эвольвентного профиля зубчатого колеса на основании сплайн-интерполяции.

В настоящее время сплайны являются весьма популярным аппаратом приближения. Сплайн является методом аппроксимированного описания сложной криволинейной траектории. Применение компьютеров в проектных работах позволило исследовать физические свойства сплайнов и смоделировать их математически. Понятие «сплайн» пришло в обиход из высшей математики, а получило распространение среди машиностроителей по мере внедрения в проектирование высокоуровневых CAD-систем.

Задача сплайновой интерполяции состоит из двух подзадач: расчет коэффициентов сплайна и расчет значений функции сплайна в отдельных его точках.

Сейчас широкое распространение для интерполяции получило использование кубических сплайн-функций – специальным образом построенных многочленов третьей степени. Они представляют собой некоторую математическую модель гибкого тонкого стержня из упругого материала.

Кубический (Cubic) сплайн CSPLINE представляет собой непрерывную кривую, проходящую через заданные точки, которые расположены вдоль аналитически вычисляемой кривой. В основе построения кубического сплайна лежит идея разбиения интерполируемого контура на небольшие интервалы, для каждого из которых задают свой полином третьей степени. Коэффициенты полинома подбираются так, что на границах интервалов сохраняется непрерывность самой функции, а также ее первой и второй производных. От количества взятых интервалов зависит точность построения (рис. 1).

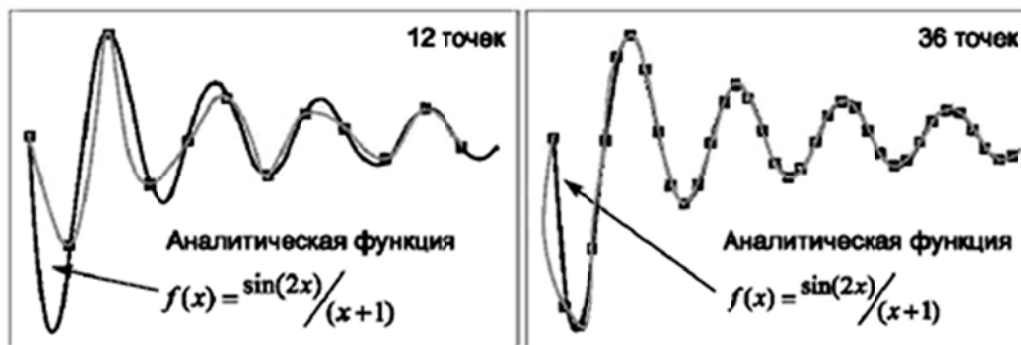


Рис. 1. Кубический сплайн

С целью повышения производительности обработки зубчатых колёс необходимо применить предложенный метод для обработки данной шестерни. Поверхность эвольвенты задана двумерным массивом координат и возникает вопрос, сколько точек может объединить гладкая сплайн-функция, чтобы при этом не нарушалась точность.

Рассмотрим процесс построения кубического сплайна на примере эвольвентного профиля детали шестерня (рис. 2).

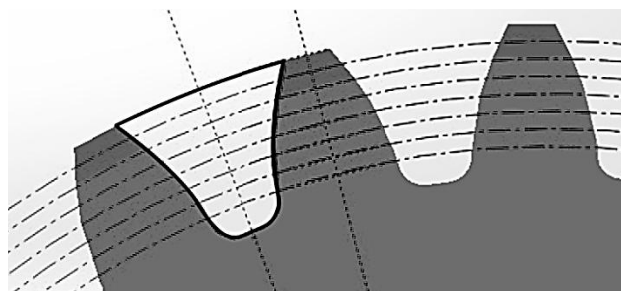


Рис. 2. Профиль колеса

Сплайн  $S(Y;x)$  на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  определяется четырьмя коэффициентами, и поэтому для его построения на всем промежутке  $[a;b]$  необходимо определить  $4N$  коэффициентов. Условие  $S(Y;x) \in C[a,b]$  эквивалентно требованию непрерывности сплайна и его производных во всех внутренних узлах  $x_i, i = 1, 2, \dots, N-1$ , сетки  $\Delta$ , что дает  $3(N-1)$  равенств. Два дополнительных условия задаются в виде ограничений на значения сплайна и его производных на концах промежутка  $[a;b]$  (или вблизи концов) и называются краевыми условиями. Существует несколько типов краевых условий, но для решения поставленной задачи необходимо выбрать краевые условия первого типа – на концах промежутка  $[a;b]$  задаются значения 1-й производной искомой функции:

$$S'(a) = Y'(a), S'(b) = Y'(b) \tag{1}$$

Итак, значения первых производных можно найти следующим образом:

$$S'(a) = Y'(a) = \frac{Y_1 - Y_0}{x_1 - x_0}, \tag{2}$$

$$S'(b) = Y'(b) = \frac{Y_N - Y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}. \tag{3}$$

Ниже представлен алгоритм построения интерполяционного кубического сплайна на промежутке  $[x_i; x_{i+1}] = [x_0; x_1]$ . На каждом из промежутков интерполяционная сплайн-функция имеет следующий вид:

$$S(Y; x) = Y_i \cdot (1-t)^2 \cdot (1+2 \cdot t) + Y_{i+1} \cdot t^2 \cdot (3-2 \cdot t) + m_i \cdot h_i \cdot t \cdot (1-t)^2 - m_{i+1} \cdot h_i \cdot t^2 \cdot (1-t), \quad (4)$$

где

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad (5)$$

$$t = \frac{x - x_i}{h_i}. \quad (6)$$

Кубический сплайн, представленный в таком виде на промежутке  $[x_0; x_1]$ , непрерывен вместе со своей первой производной всюду на интервале  $[a; b^*]$ . Выберем величины  $m_i$  так, чтобы была непрерывна и вторая производная. Так как

$$S''(Y; x) = \frac{(Y_{i+1} - Y_i) \cdot (6 - 12 \cdot t)}{h_i^2} + \frac{m_i \cdot (-4 + 6 \cdot t)}{h_i} + \frac{m_{i+1} \cdot (-2 + 6 \cdot t)}{h_i}, \quad (7)$$

$$S''(Y; x_i + 0) = 6 \cdot \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h_i^2} - \frac{4 \cdot m_i}{h_i} - \frac{2 \cdot m_{i+1}}{h_i}, \quad (8)$$

$$S''(Y; x_i - 0) = -6 \cdot \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h_{i-1}^2} + \frac{4 \cdot m_i}{h_{i-1}} + \frac{2 \cdot m_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad (9)$$

то условие непрерывности второй производной принимает вид:

$$\lambda_i \cdot m_{i-1} + 2 \cdot m_i + \mu_i \cdot m_{i+1} = 3 \cdot \left( \mu_i \cdot \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h_i} + \lambda_i \cdot \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad (10)$$

где

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{(h_{i-1} + h_i)}, \quad (11)$$

$$\lambda_i = 1 - \mu_i. \quad (12)$$

К уравнениям (12) добавляются уравнения, вытекающие из краевых условий. Так получается система из  $N + 1$  уравнений для определения  $N + 1$  неизвестных  $m_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Так как были выбраны краевые условия первого типа, то:

$$2 \cdot m_0 + \mu_0^* \cdot m_1 = c_0^*, \quad (13)$$

$$\lambda_i \cdot m_{i-1} + 2 \cdot m_i + \mu_i \cdot m_{i+1} = c_i, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (14)$$

$$\lambda_N^* \cdot m_{N-1} + 2 \cdot m_N = c_N^*, \quad (15)$$

причем

$$c_i = 3 \cdot \left( \mu_i \cdot \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h_i} + \lambda_i \cdot \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h_{i-1}} \right). \quad (16)$$

Для краевых условий первого типа:

$$\mu_0^* = \lambda_N^* = 0, \quad (17)$$

$$c_0^* = 2 \cdot Y'_0 = 2 \cdot Y'(a), \quad (18)$$

$$c_N^* = 2 \cdot Y'_N = 2 \cdot Y'(b^*). \quad (19)$$

Итак, построение интерполяционного кубического сплайна по формуле (5) сводится к вычислению величин  $m_i$ .

Необходимым критерием точности построения интерпеллянта является прохождение сплайна через все точки, заданные в приложении, с точностью до  $\delta = 0,063$  мм. Поэтому задачей исследования является выяснение:

– удовлетворяет ли заданным требованиям точности выбранный алгоритм;  
 – ввиду большого объема расчетов, определение необходимости построения сплайн-интерполянтов для каждого отрезка, заданного в приложении.

Проверку обеспечения полученным алгоритмом точности  $\delta$  можно провести следующим образом. Так как единственными известными значениями полученной интерполяционной функции являются лишь изначально заданные в приложении значения координат  $x$  и  $Y(x)$ , то для проверки точности целесообразно построить сплайн на отрезке  $[x_i; x_{i+2}]$ , а потом проверить значение интерполяционной функции  $Y(x)$  в точке  $x = x_{i+1}$ . При этом отклонение значения функции  $Y(x_{i+1})$   $\delta_1$  не должно превышать предельно допустимое значение отклонения  $\delta$ , то есть:

$$\delta_1 < \delta = 0,063. \quad (20)$$

При построении сплайн-интерпеллянта для каждого заданного отрезка возникает проблема накопления погрешности вычисления, вследствие решения системы из большого числа уравнений. Поэтому целесообразно ограничить число уравнений в системе путем сокращения числа отрезков интерполяции при обязательном соблюдении точности построения. Для уменьшения числа отрезков необходимо объединить несколько таких отрезков в один, а затем вычислить значение интерполяционной функции в известных нам промежуточных узловых точках. Такие операции необходимо проводить при объединении различного числа отрезков в один. Затем по результатам вычисления полученных отклонений выбрать наиболее оптимальный вариант, то есть тот, при котором полученная ошибка  $\delta_i$  будет наиболее приближена к предельно допустимому значению ошибки  $\delta$ .

Таким образом, алгоритм построения интерполяционного кубического сплайна выглядит так, как представлено на рис. 3.

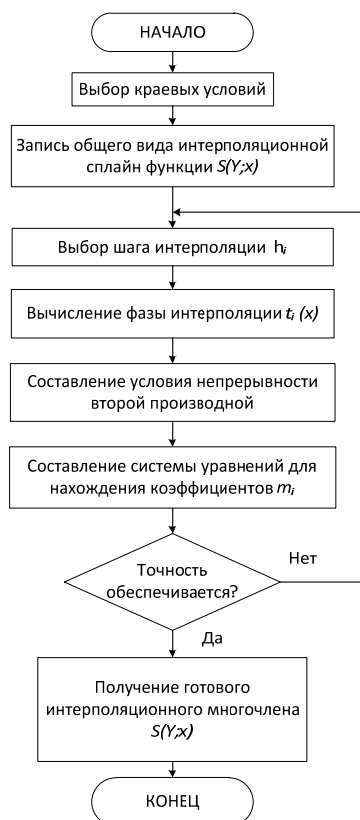


Рис. 3. Алгоритм построения интерполяционного кубического сплайна

В процессе моделирования с помощью среды MathCad были получены интерполяционные функции для каждого участка, заданного таблично. С целью определения зависимости величины погрешности вычисления интерполяционной функции от размера отрезка, на котором эта функция вычисляется, моделирование проводилось для нескольких случаев. Так объединялись два, три и более отрезков, заданных таблично, в один большой, а затем решалась система уравнений с целью получения коэффициентов интерполяционной функции. В процессе моделирования было установлено, что с увеличением длины отрезка интерполирования ошибка вычисления сплайн-функции возрастает и в случае объединения более трех отрезков ошибка выходит за пределы допустимого отклонения. Результаты показаны в табл. 1. График интерполяционной сплайн-функции представлен на рис. 4.

Таблица 1

## Результаты моделирования

Количество объединенных отрезков	Полученная погрешность $\Delta_i$ , мм
2	0,00196
3	0,00582
4	0,07195
...	...
20	0,6274

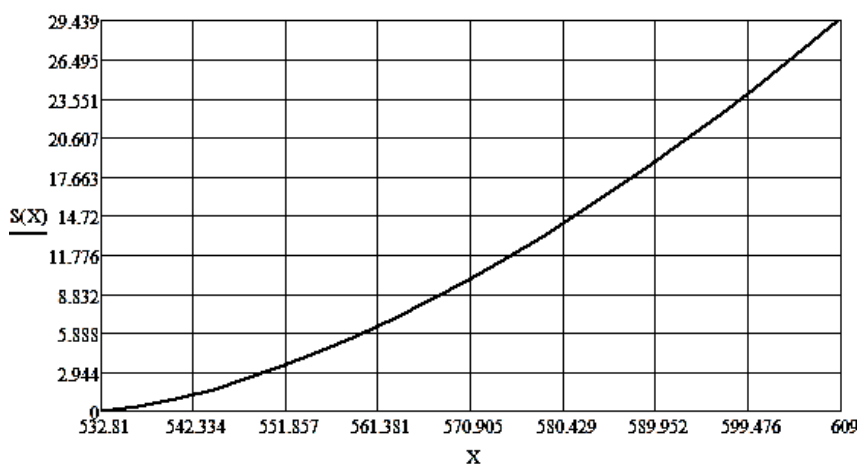


Рис. 4. График полученной интерполяционной сплайн-функции

## ВЫВОДЫ

На основании приведенной методики был разработан эффективный алгоритм обработки эвольвентного профиля зубчатого колеса на основании сплайн – интерпелляции. Также было установлено, что построение сплайна с объединением трёх отрезков является наиболее оптимальным решением по точности и ёмкости расчетов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турчак Л. И. Основы численных методов: Учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
2. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. Савьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 360 с.
3. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М. Мир, 1972. – 342 с.